Übungen zur Einführung in die Astrophysik I

Musterlösung

René Reifarth, Tanja Heftrich
Anton Görtz, Tanja Heftrich, Enis Lorenz, Dominik Plonka, Mario Weigand

1. Wenn Jupiter an der Sonne vorüberzieht, verringert sich die Leuchtkraft der Sonne auf
$$p_{\text{Restlicht}} = \frac{\left(\pi R_\odot^2 - \pi R_\text{J}\right) \cdot \sigma T_\odot^4}{\pi R_\odot^2 \cdot \sigma T_\odot^4}$$
Mit $p_{\text{Verdunklung}} = 1 - p_{\text{Restlicht}}$ folgt dann
$$p_{\text{Verdunklung}} = \frac{R_\text{J}^2}{R_\odot^2}$$
Setzt man $R_\text{J} = 7{,}149 \cdot 10^7 \text{m}$ und $R_\odot = 6{,}957 \cdot 10^8 \text{m}$, so findet man schließlich eine Verdunklung von
$$p_{\text{Verdunklung}} = 0{,}0106$$
also nur knapp über einem Prozent.

2. Inklination

   (a) Eine Bedeckung der beiden Sterne findet statt, wenn der senkrechte Abstand der Mittelpunkte der beiden Objekte die Bedingung
$$d \leq r_1 + r_2 \tag{1}$$
erfüllt. Aus 1 wird der Zusammenhang zwischen d, a und der Inklination i deutlich. Es gilt
$$\cos i = \frac{d}{a}$$
$$d = a\, \cos i \tag{2}$$
Setzt man 2 in 1 ein, so findet ergibt sich
$$a\, \cos i \leq r_1 + r_2$$

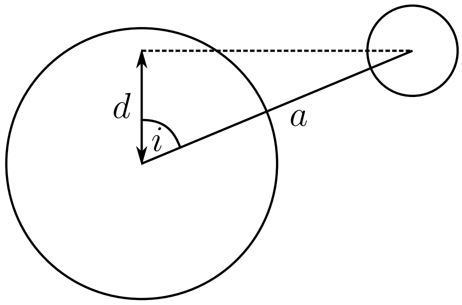

Abbildung 1: Definition von d in Aufgabe $2(a)$.

und schließlich (Vorzeichenwechsel, da $\cos x$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton fallend)

$$i \geq \arccos \frac{r_1 + r_2}{a} \tag{3}$$

(b) Setzt man $a = 1\text{AE} \approx 1{,}5 \cdot 10^{11}\text{m}$, $r_1 = 6{,}957 \cdot 10^{9}\text{m}$ und $r_2 = 6{,}957 \cdot 10^{8}\text{m}$ in 3 ein, ergibt sich der gesuchte Wert

$$i = 87{,}1°$$

3. Sirius A B

(a) Aus der Parallaxe lässt sich der Abstand des Sternsystems zur Erde mit Hilfe von

$$\tan p = \frac{1\text{AE}}{d}$$

bestimmen zu

$$d = 8{,}181 \cdot 10^{16}\text{m}$$

wobei $p = 0{,}37821\text{arcsec} = 1{,}834 \cdot 10^{-6}$ im Bogenmaß. Über den gegebenen Winkel $a = 7{,}61\text{arcsec} = 3{,}689 \cdot 10^{-5}$ folgt für die Länge der großen Halbachse $h = d\ \arctan a = 3{,}01 \cdot 10^{12}\text{m}$. Setzt man diese zusammen mit der Umlaufzeit $T = 49{,}94\text{a} = 1{,}575 \cdot 10^{9}\text{s}$ in das dritte Kepler'sche Gesetz

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot (m_\text{A} + m_\text{B})} \cdot h^3$$
$$\Leftrightarrow m_\text{A} + m_\text{B} = \frac{4\pi^2}{G \cdot T^2} \cdot h^3$$

ein, so folgt

$$m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} = 6{,}650 \cdot 10^{30}\mathrm{kg} \approx 3{,}27\, M_\odot \tag{4}$$

Aus der Bedingung für den Schwerpunkt (a_A, a_B steht für die Abstände zum Schwerpunkt)

$$m_\mathrm{A}\, a_\mathrm{A} = m_\mathrm{B}\, a_\mathrm{B} \Leftrightarrow m_\mathrm{B} = m_\mathrm{A} \frac{a_\mathrm{A}}{a_\mathrm{B}}$$

und 4 folgt schließlich

$$m_\mathrm{A} \cdot \left(1 + \frac{a_\mathrm{A}}{a_\mathrm{B}}\right) = 3{,}27\, M_\odot$$

$$m_\mathrm{A} = 2{,}23\, M_\odot \qquad\qquad m_\mathrm{B} = 1{,}04\, M_\odot$$

(b) Der Zusammenhang zwischen Leuchtkraft und bolometrischer Helligkeit ist durch

$$M - M_\text{Referenz} = -2{,}5\, \log_{10} \frac{L}{L_\text{Referenz}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{L_\text{Referenz}} = 10^{\frac{M_\text{Referenz} - M}{2{,}5}} \tag{5}$$

gegeben. Unter Verwendung der absoluten bolometrischen Helligkeit der Sonne $M_\text{Referenz} = M_\odot = 4{,}74\mathrm{mag}$ ergibt sich

$$L_\mathrm{A} = 22{,}5\, L_\odot \qquad\qquad L_\mathrm{B} = 0{,}0240\, L_\odot \tag{6}$$

(c) Bei bekannter Leuchtkraft kann der Radius von Sirius B aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz errechnet werden. Es ist

$$L_\mathrm{B} = 4\pi\, R_\mathrm{B}^2 \cdot \sigma T_\mathrm{B}^4 \Leftrightarrow R_\mathrm{B} = \sqrt{\frac{L_\mathrm{B}}{4\pi \cdot \sigma T_\mathrm{B}^4}} = 5{,}86 \cdot 10^6\mathrm{m}$$

wobei $L_\mathrm{B} = 0{,}0240\, L_\odot = 9{,}2304 \cdot 10^{24}\mathrm{W}$.
Dieser Radius entspricht $R_\mathrm{B} \approx 0{,}92\, R_\text{Erde} \approx 0{,}0084\, R_\odot$.

4. Photometrie & Spektroskopie

(a) Stellt man das dritte Keplersche Gesetz in der gegebenen Form nach der Periodendauer um, so findet man

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{M_1 + M_2}} \tag{7}$$

Unter Verwendung von $a = 2000$ AU und $M_1 \approx M_2 \approx M_\odot$ findet man

$$\begin{aligned} P_{\text{Stern}} &= \sqrt{\frac{2000^3}{2}}\mathrm{a} \\ &\approx 63000\mathrm{a} \end{aligned}$$

(b) Die Masse des Planeten gegenüber der des Sterns ist vernachlässigbar, zudem soll der Einfluss des 2. Sterns vernachlässigt werden. Mit $a = 0.44$ AU und $M_2 \approx 0$ folgt aus 7

$$\begin{aligned} P_{\text{Planet}} &= \sqrt{\frac{0.44^3}{1}}\mathrm{a} \\ &\approx 0.292\mathrm{a} \\ &\approx 107\mathrm{d} \end{aligned}$$

In der Zeit, in der sich demnach das Doppelsternsystem einmal umkreist hat, umkreist der Planet HD 80606b sein Zentralgestirn knapp $P_{\text{Stern}}/P_{\text{Planet}} \approx 220000$ mal.

(c) Da der Abstand 0.44 AU zwischen HD 80606 und HD 80606b im Vergleich zu 2000 AU vernachlässigbar ist, lässt sich die Entfernung zwischen HD 80607 und dem Planet durch 2000 AU approximieren.

Für das Verhältnis der Gravitationskräfte gilt:

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{HD 80607}}}{F_{\text{HD 80606}}} &= \frac{-GM_{\text{HD 80607}}m/r^2_{\text{HD 80607}}}{-GM_{\text{HD 80606}}m/r^2_{\text{HD 80606}}} \\ &\approx \left(\frac{r_{\text{HD 80606}}}{r_{\text{HD 80607}}}\right)^2 \\ &\approx \left(\frac{0.44\mathrm{AU}}{2000\mathrm{AU}}\right)^2 \\ &\approx 5 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Der Einfluss von HD 80607 auf den Planeten ist also vernachlässigbar, der Stern muss nicht in 4b berücksichtigt werden.